NILAI EIGEN DARI MATRIKS SIMETRIS

Berny Pebo Tomasouw
(Kamis, 13 Februari 2014)

A. PENGANTAR

Dalam tulisan kali ini, saya akan membahas bentuk nilai eigen dari sebuah matriks khusus, yakni matriks simetris yang semua elemennya berupa bilangan real.

Jika sebarang matriks $A \in M_n(\mathbb{R})$ maka nilai eigen dari matriks tersebut bisa berupa bilangan real ataupun bilangan kompleks. Hal lain yang juga perlu diketahui adalah jika nilai eigennya berupa bilangan kompleks maka konjugat kompleksnya juga merupakan nilai eigen dari matriks tersebut. Dengan kata lain, jika $\lambda = a + ib$ adalah nilai eigen dari matriks *A* maka $\lambda = a - ib$ juga merupakan nilai eigen dari matriks *A*.

Pasangan konjugat kompleks ini bisa muncul karena polinomial karakteristik dari matriks *A*, yakni $\det(\lambda I - A)$ memiliki koefisien berupa bilangan real. Akibatnya, jika polinomial tersebut mengandung akar kompleks, maka akar-akar kompleks ini muncul dalam pasangan konjugat.

Namun hal yang berbeda akan kita peroleh jika $A \in M_n(\mathbb{R})$ adalah matriks simetris. Dalam tulisan ini, saya akan membuktikan teorema yang menjamin bahwa semua nilai eigen dari sebarang matriks simetris selalu bernilai real.

B. PEMBAHASAN

Sebelum saya masuk ke teorema utama, ada baiknya jika saya perlihatkan beberapa sifat dari bilangan kompleks yang akan menolong dalam pembuktian teorema utama.

Definsi 1

Diberikan $z \in \mathbb{C}$. Jika $z = a + ib$ maka modulus dari *z* didefinisikan sebagai

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Teorema 1

Diberikan $z \in \mathbb{C}$. Jika $\overline{z}$ adalah konjugat kompleks dari *z* maka berlaku
$z = \overline{z}$ jika dan hanya jika *z* bilangan real.

Bukti :

$\Rightarrow$). Misalkan $z = a + ib$, maka konjugat kompleksnya adalah $\overline{z} = a - ib$.

Selanjutnya,

$$\begin{aligned} z = \overline{z} &\Rightarrow a + ib = a - ib \\ &\Rightarrow ib = -ib \\ &\Rightarrow b = -b \\ &\Rightarrow b = 0 \end{aligned}$$

Hasil terakhir memperlihatkan bahwa $b = 0$, ini berarti $z = a$ atau dengan kata lain terbukti bahwa *z* adalah bilangan real.

$\Leftarrow$). Misalkan bahwa *z* adalah bilangan real, maka $z = a + i0$.

Selanjutnya,

$$
\begin{aligned}
z &= a + i0 \\
&= a \\
&= a - i0 \\
&= \overline{z}
\end{aligned}
$$

Terbukti bahwa $z = \overline{z}$.

Teorema 2

Untuk setiap $z \in \mathbb{C}$ berlaku

a. $|z| > 0$ jika $z \neq 0$.

b. $z\,\overline{z} = |z|^2$

Bukti : (mudah untuk dibuktikan)

Definsi 2

Diberikan $v, w \in \mathbb{C}^n$.

a. Hasil kali dalam (*inner product*) antara vektor *v* dan *w* didefinisikan dengan

$$
\begin{aligned}
\langle v, w \rangle &= \overline{v}^T w \\
&= \overline{v}_1 w_1 + \overline{v}_2 w_2 + \cdots + \overline{v}_n w_n
\end{aligned}
$$

b. Norma (panjang) vektor *v* didefinisikan dengan

$$\|v\| = \sqrt{\overline{v}^T v}$$

Catatan :

Dalam tulisan ini saya memandang vektor $v \in \mathbb{C}^n$ sebagai matriks kolom $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$.

Persamaan $\|v\| = \sqrt{\overline{v}^T v}$ dapat ditulis juga sebagai $\overline{v}^T v = \|v\|^2$ yang mana sangat berguna dalam pembuktian teorema utama.

Teorema berikut ini merupakan inti dalam tulisan saya kali ini.

Teorema 3

Jika $A \in M_n(\mathbb{R})$ adalah matriks simetris maka semua nilai eigennya bernilai real.

Bukti :

Misalkan $\lambda \in \mathbb{C}$ adalah nilai eigen dari mariks *A* dan *x* adalah vektor eigen yang berkorespondensi dengan nilai eigen λ, sehingga berlaku

$$Ax = \lambda x \qquad (1)$$

Karena pasangan konjugat muncul sebagai nilai eigen dari matriks *A*, maka $\overline{\lambda}$ juga merupakan nilai eigen dari *A* dan $\overline{x}$ adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan $\overline{\lambda}$ serta berlaku

$$A\overline{x} = \overline{\lambda}\,\overline{x} \qquad (2)$$

Selanjutnya, dari Persamaan (2) diperoleh

$$
\begin{aligned}
\left(A\overline{x}\right)^T = \left(\overline{\lambda}\,\overline{x}\right)^T \quad &\Rightarrow \left(\overline{x}\right)^T A^T = \overline{\lambda}\left(\overline{x}\right)^T \\
&\Rightarrow \left(\left(\overline{x}\right)^T A^T\right)x = \left(\overline{\lambda}\left(\overline{x}\right)^T\right)x \\
&\Rightarrow \left(\overline{x}\right)^T\left(Ax\right) = \overline{\lambda}\left(\left(\overline{x}\right)^T x\right) \\
&\Rightarrow \left(\overline{x}\right)^T\left(\lambda x\right) = \overline{\lambda}\left(\left(\overline{x}\right)^T x\right) \\
&\Rightarrow \lambda\left(\left(\overline{x}\right)^T x\right) = \overline{\lambda}\left(\left(\overline{x}\right)^T x\right) \\
&\Rightarrow \lambda\left\|x\right\|^2 = \overline{\lambda}\left\|x\right\|^2
\end{aligned}
$$

Karena vektor eigen x adalah vektor tak-nol maka $\left\|x\right\|^2 \neq 0$, sehingga persamaan terakhir akan menjadi $\lambda = \overline{\lambda}$. Karena $\lambda = \overline{\lambda}$ dan dengan menggunakan Teorema 1 di atas, maka terbukti bahwa λ adalah bilangan real.

C. PENUTUP

Mohon maaf jika terdapat kekurangan ataupun kesalahan. Saran dan kritik dapat dikirim ke email saya : bernypebo@yahoo.co.id